

Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.

Nombre de pages : 4

Pour chaque exercice, répondre dans le cadre en page 3/cocher la bonne réponse sur la grille en page 4.

### Exercice 1 : Questions de cours

1. Énoncer la définition qu'une fonction  $f$  est négligeable par rapport à une fonction  $g$  au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$ .
2. Énoncer (avec les  $\epsilon$  et  $\delta$ ) la définition qu'une fonction  $f$  est continue en un point  $x_0 \in \mathbb{R}$  de son domaine de définition.
3. Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange sur un intervalle  $[a, b]$  pour une fonction  $f$ , avec ses hypothèses.
4. Énoncer la définition d'un espace propre associé à une valeur propre.
5. Énoncer le théorème fondamental de la diagonalisation qui en donne les conditions nécessaires et suffisantes.

### Exercice 2 : DLs

1. Au voisinage de zéro,
  - a)  $\frac{1}{\tan x} = 1/x + x^3/3$
  - b)  $\frac{1}{\tan x} = x + x^3/3 + o(x^3)$
  - c)  $\frac{1}{\tan x} = 1/x - x/3 + o(x^2)$
  - d)  $\frac{1}{\tan x} = 1/x + x/3 + o(x^2)$
2. Au voisinage de zéro,
  - a)  $\frac{1}{1+\cos x} = 2 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + o(x^4)$
  - b)  $\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
  - c)  $\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)$
  - d)  $\frac{1}{1+\cos x} = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
3. Au voisinage de l'infini, la courbe d'équation  $y = \frac{1}{1+\cos(1/x)}$ ,
  - a) admet une courbe asymptote d'équation  $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{8x^2}$  et est au-dessus de cette dernière.
  - b) admet une courbe asymptote d'équation  $y = 1 + \frac{1}{4x^2}$  et est au-dessus de cette dernière.
  - c) admet une courbe asymptote d'équation  $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}$  et est au-dessus de cette dernière.
  - d) admet une courbe asymptote d'équation  $y = 2 + \frac{1}{4x^2}$  et est au-dessous de cette dernière.

### Exercice 3 : Intégrales

- L'intégrale généralisée suivante,  $\int_0^1 \frac{dx}{\cos x - 1}$ 
  - est convergente
  - est divergente
- Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, \infty[$  par  $f(x) = x^{-\ln x}$ .
  - L'intégrale généralisée  $\int_0^1 f(x)dx$  est convergente mais l'intégrale généralisée  $\int_1^\infty f(x)dx$  est divergente.
  - L'intégrale généralisée  $\int_0^1 f(x)dx$  est divergente mais l'intégrale généralisée  $\int_1^\infty f(x)dx$  est convergente.
  - Les intégrales généralisées  $\int_0^1 f(x)dx$  et  $\int_1^\infty f(x)dx$  sont toutes les deux divergentes.
  - L'intégrale généralisée  $\int_0^\infty f(x)dx$  est convergente.

### Exercice 4 : Diagonalisation

Soit la matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

- $A$  admet pour valeur propres
  - 0, 1 et 2;
  - 1 comme valeur propre simple, 2 comme valeur propre double;
  - 1 comme valeur propre double, 2 comme valeur propre simple.
- Soient  $e_1 = (1, 1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1, 1)$   $e_3 = (0, 0, 1)$   $e_4 = (1, 1, 1)$ . Pour une valeur propre  $\lambda$ , on note  $E_\lambda$  l'espace propre associé. Laquelle de ces propositions est vraie?
  - $E_1 = \text{vect}\{e_1, e_2\}$   $E_2 = \text{vect}\{e_3\}$ , et  $A$  est diagonalisable.
  - $E_1 = \text{vect}\{e_1, e_2\}$   $E_2 = \text{vect}\{e_3\}$ , et  $A$  n'est pas diagonalisable.
  - $E_0 = \text{vect}\{e_4\}$ ,  $E_1 = \text{vect}\{e_2\}$   $E_2 = \text{vect}\{e_3\}$ , et  $A$  est diagonalisable.
  - $E_0 = \text{vect}\{e_4\}$ ,  $E_1 = \text{vect}\{e_2\}$   $E_2 = \text{vect}\{e_3\}$ , et  $A$  n'est pas diagonalisable.
  - $E_1 = \text{vect}\{e_1, e_3\}$   $E_2 = \text{vect}\{e_2\}$ , et  $A$  est diagonalisable.
  - $E_1 = \text{vect}\{e_1, e_3\}$   $E_2 = \text{vect}\{e_2\}$ , et  $A$  n'est pas diagonalisable.

### Exercice 5 : Formes Quadratiques

Soit la forme quadratique dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $Q(x, y) = -xy$ .

- $Q$  est
  - définie-positive
  - définie-négative
  - semi-définie-positive
  - semi-définie-négative
  - indéfinie

### Exercice 1 : Questions de cours

1. Réponse :

2. Réponse :

3. Réponse :

4. Réponse :

5. Réponse :

## Grille de réponses

Question numéro	Réponse
Exercice 2	
Question 1	(a) (b) (c) (d)
Question 2	(a) (b) (c) (d)
Question 3	(a) (b) (c) (d)
Exercice 3	
Question 1	(a) (b)
Question 2	(a) (b) (c) (d)
Exercice 4	
Question 1	(a) (b) (c)
Question 2	(a) (b) (c) (d) (e) (f)
Exercice 5	
Question 1	(a) (b) (c) (d) (e)

Coller une étiquette ici :