Licence 1 Mention Économie parcours Économie-Gestion
Licence 1 Mention Économie parcours Économie-Droit
Épreuve : Mathématiques 2 - C.BRUCHE / M.DUVAL - Code : L1-S2-3

JUSTIFIER SOIGNEUSEMENT TOUTES VOS RÉPONSES

BARÈME : Ex1 sur 5pts $(1+2+2)$ **; Ex2 sur 5pts** $(3+2)$ **; Ex3 sur 10pts** (10×1)

I. Soient E et F des espaces vectoriels, $f : E \to F$ une application linéaire, et u_1, u_2, u_3, u_4 des vecteurs de E.

1) Rappeler la définition de $Im(f)$.

2) Rappeler la définition de "la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est génératrice de E".

3) Montrer que si la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est génératrice de E, alors la famille $\{f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4)\}$ engendre $Im(f)$.

II. On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^7 e^{x^4+1}$.

1) Grâce au changement de variable $t \mapsto -t$, montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \int_{-a}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt$$

(On ne cherchera pas à calculer la valeur de l'intégrale)

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(t)dt$.

III. Soit $f : (x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, 2x + 2y - 4z, -3x - 3y + 6z)$.

1) Vérifier que f est une application linéaire (dont on précisera les espaces vectoriels de départ et d'arrivée).

2) Déterminer une base de $Ker(f)$.

3) L'application f est-elle injective ?

4) Déterminer la dimension, puis une base de $Im(f)$.

5) L'application f est-elle surjective ?

6) Déterminer un système d'équations caractéristique de $Im(f)$.

7) Donner les natures géométriques de $Ker(f)$ et $Im(f)$.

8) On note A la matrice associée à l'application linéaire f, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice A est-elle inversible ?

9) On considère le système $AX = B$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$. Discuter, en fonction des valeurs de a et b, le nombre de solutions du système.

10) Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. En déduire que $\det(A - 9I_3) = 0$.