Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2015-2016

Session 1 - Semestre 2

Licence 1 mention Economie et Gestion
Licence 1 mention Economie et Droit

EPREUVE : MATHÉMATIQUES 2

Date de l'épreuve : 18 MAI 2016

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : calculatrice non graphique, non programmable

Nombre de pages : 2

Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Questions de cours (4 points)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

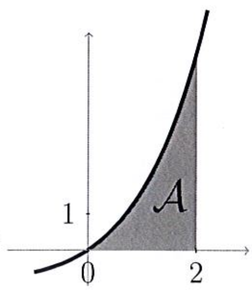
1. Rappeler la définition de $Ker(f)$.
2. Montrer que $Ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. On suppose désormais que E est de dimension finie. Énoncer le théorème du rang.

Exercice 1 (3 points)

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x t\sqrt{e^t}dt = 2xe^{x/2} - 4e^{x/2} + 4.$$

On pourra utiliser une intégration par parties.
On rappelle que $\forall a \in \mathbb{R}_+, \sqrt{a} = a^{1/2}$.



2. Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe représentative de la fonction f définie par $f : x \mapsto x\sqrt{e^x}$.
Donner l'aire du domaine grisé $\mathcal{A}$.

EXERCICE 2 (13 points)

Soient $u = (2,1,0)$, $v = (0,1,1)$ et $w = (2,2,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soit $E = Vect(\{u, v, w\})$.

1. La famille $\{u, v, w\}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Déterminer la dimension de E.
3. Déterminer une équation caractéristique (ou un système d'équations caractéristique) de E.
4. Quelle est la nature géométrique du sous-espace E ?
5. Parmi les vecteurs suivants, reporter sur votre copie ceux qui appartiennent à E :

   ☐ $(1,0,1)$ ☐ $(2,0,-1)$ ☐ $(0,0,0)$ ☐ $(2,2,1)$ ☐ $(4,-1,-3)$ ☐ $(0,2,-2)$

6. Parmi les vecteurs suivants, reporter sur votre copie celui avec lequel on peut compléter la famille $\{u; v\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$:

   ☐ $(4,-1,-3)$ ☐ $(2,2,1)$ ☐ $(0,0,0)$ ☐ $(1,0,1)$ ☐ $(2,0,-1)$

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (2x, x+y, y)$.

7. Déterminer la matrice A associée à f (relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$).
8. Déterminer les dimensions de $Ker(f)$ et de $Im(f)$.
9. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ? Si oui, donner l'application réciproque f^{-1}.
10. Parmi les familles de vecteurs suivantes, reporter sur votre copie celles qui sont génératrices de $Im(f)$:

    ☐ $\{u\}$ ☐ $\{u, v\}$ ☐ $\{v, w\}$ ☐ $\{u, v, w\}$ ☐ $\{u, v, 0_{\mathbb{R}^3}\}$

11. Parmi les systèmes linéaires suivants, d'inconnues x et y, reporter sur votre copie ceux qui possèdent au moins une solution :

    (S_1) $f(x,y) = (1,0,1)$
    (S_2) $f(x,y) = (2,0,-1)$
    (S_3) $f(x,y) = (4,-1,-3)$
    (S_4) $f(x,y) = (0,2,-2)$
    (S_5) $f(x,y) = (2a, 2a, a)$, où a est un paramètre réel

    Indication : on pourra utiliser les propriétés de l'application f.

12. Sans le résoudre, donner le nombre de solution(s) du système linéaire $f(x,y) = (a,b,c)$, d'inconnues x et y, en fonction des paramètres réels a, b et c.