Licence 1 mention Economie parcours économie-gestion
Licence 1 mention Economie parcours économie-droit

EPREUVE : MATHEMATIQUES 1 – M. DUVAL/C. BRUCHE – Code : L1-S1-4

1. On considère la phrase quantifiée $\mathcal{P}$ suivante :

$$\mathcal{P} : \forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}_+,\ y^2 < x - 1$$

   (a) Donner la négation de la phrase $\mathcal{P}$.

   (b) La phrase $\mathcal{P}$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier à l'aide d'une démonstration.

2. On pose $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

   (a) Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f.

   (b) Calculer la dérivée première de f.

   (c) On rappelle que :
   – pour une fonction f n-fois dérivable sur un intervalle I, $f^{(n)}$ correspond à sa dérivée n-ième sur I
   – pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$
   Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D_f, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{-x^3 - 4x^2 - x + 6}{6 - 6x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   (a) La fonction f est-elle continue en 0 ?

   (b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

   (c) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 ?

   (d) La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

   (e) Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et donner le prolongement par continuité, qu'on appelle $\tilde{f}$.

   (f) La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 1 ?

4. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$. Déterminer les extrema éventuels de f sur $\mathbb{R}$. Ces extrema sont-ils globaux ? Justifier vos réponses.