Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2015-2016

Session 1 - Semestre 1

Licence 1 mention Economie parcours économie-gestion
Licence 1 mention Economie parcours économie-droit

EPREUVE : MATHEMATIQUES 1

Date de l'épreuve : 08/01/2016

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : calculatrice type casio fx-92

Nombre de pages (y compris page de garde) : 6

CONSIGNES :

1. Dégrafer délicatement la dernière feuille du sujet, qui contient la grille de réponses pour le QCM, et coller une étiquette sur cette feuille qui sera à rendre avec la copie. La composition de l'Exercice de rédaction sera faite sur la copie.
2. Barême (susceptible d'être modifié) : QCM sur 12pts ; Exercice de rédaction sur 8pts. Pour le QCM : les questions peuvent avoir **plusieurs bonnes réponses.** Il ne sera pas mis de point négatif pour une réponse incorrecte cochée.

QCM : Les réponses à ce QCM sont à noter sur la grille-réponse en fin de sujet.

- On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^2 + 2x}$ (questions 1 à 7).

1 - Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 0 par la fonction f :

Réponses possibles :

a. 1
b. -1
c. 0 n'a pas d'antécédent par f
d. 4
e. 0
f. -2

2 - Déterminer le(s) image(s) éventuelle(s) de 0 par la fonction f :

Réponses possibles :

a. 8
b. 2
c. 0
d. 0 ne possède pas d'image par f
e. 4
f. 1

3 - Déterminer le domaine de définition de f :

Réponses possibles :

a. $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$
b. $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1; 4\}$
c. $\mathbb{R}$
d. $\mathbb{R}^*$
e. $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$
f. $\mathbb{R}_+$

4 - On donne le résultat suivant : $f'(1) = -3$. L'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est donnée par :

Réponses possibles :

a. $y = -3x + 1$
b. $y = -3x$
c. $y = x - 3$
d. $y = -3x - 1$
e. $y = -3x - 1$
f. $y = -3x + 3$

5 - Parmi les assertions suivantes, cochez celles qui sont vraies :

Réponses possibles :

a. f est prolongeable par continuité en 3
b. f est prolongeable par continuité en -2
c. f est prolongeable par continuité en 4
d. f n'est pas prolongeable par continuité
e. f est prolongeable par continuité en 1
f. f est prolongeable par continuité en 0

6 -Parmi les assertions suivantes, cochez celles qui sont vraies :

Réponses possibles :

a. f en dérivable en 0

b. f est continue en -2

c. f est continue en 4

d. f en dérivable en -2

e. f est continue en 1

f. f est continue en 0

7 - La dérivée de f est donnée par la formule :

Réponses possibles :

a. $\forall x \in D_f, f'(x) = \dfrac{(3x^2 - 6x - 6)(x^2 + 2x) + (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)(2 + 2x)}{x^2 + 2x}$

b. $\forall x \in D_f, f'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x - 6}{(x^2 + 2x)^2}$

c. $\forall x \in D_f, f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

d. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{(x - 2)(x + 2)^2}{(x^2 + 2x)^2}$

e. $\forall x \in D_f, f'(x) = \dfrac{(3x^2 - 6x - 6)(x^2 + 2x) + (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)(2 + 2x)}{(x^2 + 2x)^2}$

f. $\forall x \in D_f, f'(x) = \dfrac{4}{(x^2 + 2x)^2}$

- Soit une fonction $f : E \to F$ (questions 8 à 10).

8 - Donner la définition de "f est bijective" avec des quantificateurs (le symbole $\exists!$ signifiant « il existe un unique ») :

Réponses possibles :

a. $\forall y \in E, \exists! x \in F, y = f(x)$

b. $\forall x \in E, \exists! y \in F, y = f(x)$

c. $\exists! y \in F, \forall x \in E, y = f(x)$

d. $\exists! y \in E, \forall x \in F, y = f(x)$

e. $\exists! x \in E, \forall y \in F, y = f(x)$

f. $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$

9 - On rappelle que la fonction f est dite injective si elle vérifie :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Quelle est la définition de « f n'est pas injective » ?

Réponses possibles :

a. $\exists (x_1, x_2) \notin E^2, f(x_1) \neq f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$

b. $\exists (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) \neq f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$

c. $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

d. $\exists (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$

e. $\forall (x_1, x_2) \notin E^2, f(x_1) \neq f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$

f. $\exists (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

10 - On rappelle que la fonction f est dite surjective si elle vérifie :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

Quelle est la définition de « f n'est pas surjective » ?

Réponses possibles :

a. $\forall x \in E, \exists y \in F, y \neq f(x)$.

b. $\exists y \in F, \forall x \in E, y = f(x)$.

c. $\forall y \in F, \exists x \in E, y \neq f(x)$.

d. $\forall x \in E, \exists y \in F, y = f(x)$.

e. $\exists y \in F, \forall x \in E, y \neq f(x)$.

f. $\forall y \notin F, \exists x \notin E, y \neq f(x)$.

- Soit $g : E \to F$ défini par $\forall x \in E, g(x) = e^{2x-1}$ (questions 11 et 12).

11 - Pour quels ensembles E et F cette fonction est-elle bijective ?

Réponses possibles :

a. $E = [0; +\infty[$ et $F = [1/2; +\infty[$

b. $E =]0; +\infty[$ et $F = \mathbb{R}$

c. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$

d. $E = [1/2; +\infty[$ et $F = [0; +\infty[$

e. $E =]0; +\infty[$ et $F =]0; +\infty[$

f. $E = \mathbb{R}$ et $F =]0; +\infty[$

12 - Dans le cas où elle est bijective, quelle est l'expression de la fonction réciproque $g^{-1} : F \to E$?

Réponses possibles :

a. $x \mapsto \dfrac{1 + \ln(x)}{2}$.

b. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

c. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{2x - 1}\right)$.

d. $x \mapsto \dfrac{\ln(x) - 1}{2}$.

e. $x \mapsto \ln(2x - 1)$.

f. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{2x + 1}\right)$.

- Questions en vrac...

13 - Quelle est la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$?

Réponses possibles :

a. $-\infty$

b. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

c. 0

d. Cette limite n'existe pas.

e. $+\infty$

f. $\sqrt{2}$

14 - Quelle est la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + 10x + 8}{3x + 3}$?

Réponses possibles :

a. $-\infty$

b. 2

c. $\frac{2}{3}$

d. Cette limite n'existe pas.

e. $-\frac{2}{3}$

f. 0

15 - L'équation $10^{2x} - 4 \times 10^{x} + 3 = 0$ admet :

Réponses possibles :

a. une infinité de solutions réelles

b. exactement deux solutions réelles

c. aucune solution réelle

d. Aucune des autres réponses n'est correcte

e. exactement trois solutions réelles

f. exactement une solution réelle

16 - Soit f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{|x+1|}{x-1}}$. Alors f

Réponses possibles :

a. est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

b. est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

c. est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

d. est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$

e. Aucune des autres réponses n'est correcte

f. est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Exercice de rédaction :
Les réponses à cet exercice devront être soigneusement rédigées sur la copie.

Soit $f : x \mapsto x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x - 1$.

1. Déterminer le domaine de définition, noté D_f, de f et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur ce domaine.
2. Déterminer les expressions des dérivées première et seconde de f sur D_f.
3. Montrer que f possède trois points critiques dans D_f, notés α, β, γ, vérifiant

$$-1 < \alpha < 0 < \beta < 1 < \gamma < 2$$

4. Dresser le tableau de signes de la fonction f''.
5. En déduire la nature des points-critiques α, β, γ.
6. La fonction f admet-elle un maximum global sur D_f ? un minimum global sur D_f ?

	a	b	c	d	e	f
Question n. 1						
Question n. 2						
Question n. 3						
Question n. 4						
Question n. 5						
Question n. 6						
Question n. 7						
Question n. 8						
Question n. 9						
Question n. 10						
Question n. 11						
Question n. 12						
Question n. 13						
Question n. 14						
Question n. 15						
Question n. 16						

Collez ici votre étiquette