Université Toulouse 1 Capitole
Ecole d'économie de Toulouse

Année universitaire 2014-2015
Session 1 - Semestre 4
Licence 2 mention Economie et Gestion
Licence 2 mention Economie et Gestion parcours Européen
Licence 2 mention Economie et Droit
Licence 2 mention Economie et Droit parcours Européen

EPREUVE : STATISTIQUE INFERENTIELLE

Date de l'épreuve : 4 mai 2015

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Aucun
Liste des matériels autorisés : Calculatrice type fx-92
Nombre de pages : 9

CONSIGNES :

1. Rédiger sur le sujet.
2. Arrondir les résultats à 10^{-2}.
3. Concernant l'exercice 2 (QCM), une seule réponse est correcte pour chaque question. **Vous devez reporter vos réponses dans le tableau page 9.**
4. Notation : Chaque exercice est noté sur 10 points.
   Pour le QCM : une réponse juste vaut 1 point tandis qu'une réponse fausse vaut -1/3 point (de façon à éviter les réponses au hasard).

1 Exercice 1 : Problème

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 :
Un fabricant d'ascenseurs fait face, pour un modèle d'ascenseur particulier, à de nombreuses pannes dues à des charges de poids trop importantes.
Soit X le poids d'un individu prenant régulièrement ce type d'ascenseur. On suppose que X a pour espérance μ et variance σ^2, deux paramètres inconnus. On a prélevé un échantillon aléatoire de 100 personnes qui prennent ce type d'ascenseurs, pour lequel le poids moyen était de $\bar{X} = 75$ kg avec un écart type estimé de $s = 10$ kg.

1. Rappeler la définition de la moyenne empirique $\bar{X}$ et de la variance empirique modifiée s^2.

2. Donner la valeur des biais de ces estimateurs sans justifier.

3. Donner la forme générale d'un intervalle de confiance pour μ, de niveau de confiance $1 - \alpha$, en précisant les notations qui n'ont pas encore été introduites.

4. Donner l'intervalle de confiance observé pour μ, de niveau 5%.

5. Interpréter cet intervalle de confiance.

6. Dans cette question, $\mu = 80$ et $\sigma = 10$. D'après les normes de constructeurs concernant les câbles d'ascenseurs de ce type, on préconise un poids total maximum de 800 kg. Combien de personnes maximum l'ascenseur peut-il supporter si on veut être sûr au moins à 95% qu'il n'y aura pas de panne due à une surcharge pondérale ? Donner toutes les hypothèses nécessaires et expliquer le raisonnement.

Partie 2 :

On s'intéresse au temps d'attente d'un individu retenu dans un ascenseur en panne. On voudrait vérifier que le temps d'attente est plus long en période de vacances scolaires que hors vacances scolaires. On note X le temps d'attente d'un individu coincé dans un ascenseur pendant les vacances scolaires et on suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu_X; \sigma_X^2)$.
On notera Y le temps d'attente d'un individu coincé dans un ascenseur hors vacances scolaires et on suppose que $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y; \sigma_Y^2)$.
On suppose que les deux échantillons sont indépendants et que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Dans un échantillon aléatoire de 8 individus, coincés de manière indépendante dans des ascenseurs pendant les vacances scolaires, le temps d'attente moyen était de 45 minutes, avec une variance estimée de $s_X^2 = 35$ minutes. Dans un échantillon aléatoire de 6 individus, coincés de manière indépendante dans des ascenseurs hors vacances scolaires, le temps d'attente moyen était de 40 minutes, avec une variance estimée de $s_Y^2 = 25$ minutes.

1. Nous allons chercher à vérifier que le temps d'attente est plus long en période de vacances scolaires, plutôt qu'en dehors de cette période, à l'aide d'un test statistique de niveau 5%.

   (a) Donner les hypothèses H_0 et H_1.

   (b) Donner la statistique de test, notée Z, en explicitant les nouvelles notations utilisées.

   (c) Déterminer la loi de Z sous H_0.

   (d) Déterminer la zone de rejet de H_0, notée W.

   (e) Calculer la valeur observée de Z, notée Z_{obs}.

(f) Conclure.

2. Sans calcul supplémentaire, ni recherche dans la table, quelle serait l'issue du test au niveau 1% ?

3. Rappeler la définition de la P-valeur ici. Donner un encadrement de la P-valeur du test. Sans calcul supplémentaire, quelle serait l'issue du test au niveau 10% ?

4. Vérifier, à l'aide d'un intervalle de confiance de niveau 10%, que l'hypothèse $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ peut être envisagée.

2 Exercice 2 : QCM

Dans ce questionnaire à choix multiple, une seule réponse est correcte par question parmi les 4 possibles. Une bonne réponse est notée 1 point, une mauvaise réponse enlève 1/3 point. La note minimale à cet exercice est 0.

Consigne : vous devez reporter vos réponses dans le tableau page 9.

1- Qu'est-ce que l'EQM d'un estimateur $\hat{\theta}$ d'un paramètre θ ?

a. La somme de la variance de $\hat{\theta}$ au carré et de son biais au carré.

b. La somme de l'écart-type de $\hat{\theta}$ au carré et de son biais au carré.

c. La somme de la variance de $\hat{\theta}$ et de son biais.

d. Le carré de la somme de l'écart-type de $\hat{\theta}$ et de son biais.

2- Si un estimateur $\hat{\theta}$ est sans biais pour estimer un paramètre θ et que sa variance tend vers 0 quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini, on peut dire que :

a. L'estimateur $\hat{\theta}$ n'est pas un estimateur convergent de θ.

b. Le paramètre θ converge vers $\hat{\theta}$ en loi.

c. L'estimateur $\hat{\theta}$ converge vers θ en probabilité.

d. Aucune des autres réponses n'est correcte.

3- Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right)$ un vecteur gaussien. La loi de $Y = 2X_1 - X_2 + 4$ est :

a. Une loi de Fisher à 1 et 2 degrés de liberté.

b. Une loi Normale de moyenne 3 et de variance 6.

c. Une loi Normale de moyenne 3 et de variance 12.

d. Une loi de Fisher à 2 et 1 degrés de liberté.

4- Soit X_1 une variable aléatoire réelle de loi normale de moyenne 3 et de variance 2 et X_2 une autre variable aléatoire réelle de loi normale de moyenne 1 et de variance 1. On peut dire :

a. que la loi de $2X_1 - X_2$ est une loi normale de moyenne 5 et de variance 9

b. que la loi de $3X_1$ est une loi normale de moyenne 9 et de variance 18

c. que la loi de $4X_2$ est une loi normale de moyenne 4 et de variance 4

d. que la loi de $X_1 + X_2$ est une loi normale de moyenne 4 et de variance 3 ?

5- Soit une suite (X_n), n entier naturel non nul, de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On dit que la suite (X_n) converge en loi vers la variable X si et seulement si :

a. la suite (F_n) de fonctions de répartition des X_n converge vers la fonction de répartition F de X en tout point de continuité de F.

b. la suite (F_n) de fonctions de répartition des X_n converge vers la fonction de répartition F de X.

c. la suite (f_n) des fonctions de densité de X_n converge vers la fonction de densité f de X.

d. la suite (F_n) de fonctions de répartition des X_n converge vers la fonction de répartition F de X en tout point de discontinuité de F.

6- On interroge 100 personnes salariées dans une entreprise en 2013 et on note $X_1, \ldots, X_{100}$ les salaires en 2013, supposés issus de variables aléatoires i.i.d. de moyenne μ_X et de variance σ_X^2, paramètres inconnus. Le salaire moyen pour ces 100 personnes est noté $\bar{X}$. Un intervalle de confiance calculable pour μ_X au niveau de confiance $1-\alpha$ est :

a. $\left[\bar{X} - t_{n-1;1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \,;\, \bar{X} + t_{n-1;1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right]$ où $t_{n-1;1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ d'une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

b. Aucune des autres réponses n'est correcte.

c. $\left[\bar{X} - t_{n-1;1-\alpha/2} \frac{\sigma_X^2}{\sqrt{n}} \,;\, \bar{X} + t_{n-1;1-\alpha/2} \frac{\sigma_X^2}{\sqrt{n}}\right]$ où $t_{n-1;1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ d'une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

d. $\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \,;\, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right]$ où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ d'une loi normale centrée réduite.

7-On interroge 100 personnes salariées dans une entreprise en 2013 et en 2014. Pour chacun des individus, $i = 1, \ldots, 100$, on note X_i son salaire en 2013 et Y_i son salaire en 2014. On suppose $X_1, \ldots, X_{100}$ issus de variables aléatoires i.i.d. ainsi que $Y_1, \ldots, Y_{100}$.
Si on cherche à tester l'égalité des moyennes de salaires entre 2013 et 2014, on peut dire des deux échantillons :

a. qu'ils sont indépendants et qu'on ne peut pas appliquer les résultats du cours sur les tests d'hypothèses pour comparer deux moyennes ?

b. qu'ils sont indépendants et qu'on peut appliquer les résultats du cours sur les tests d'hypothèses pour comparer deux moyennes et ensuite conclure

c. qu'ils sont appariés et qu'on peut appliquer les résultats du cours sur les tests d'hypothèses pour une moyenne ?

d. qu'ils sont appariés et qu'on ne peut pas appliquer les résultats du cours sur les tests d'hypothèses pour une moyenne ?

8- En 2014, lors d'une enquête préélectorale pour des élections qui opposent le candidat Ernest au candidat Bart, on interroge 1000 personnes et on obtient que 480 personnes vont voter pour Ernest tandis que 520 vont voter pour Bart. Un intervalle de confiance pour la proportion p de personnes qui vont voter pour Ernest au niveau de confiance 95% est :

a. $\left[\frac{480}{1000} - 1.96\sqrt{\frac{0.48\times 0.52}{1000}} \,;\, \frac{520}{1000} + 1.96\sqrt{\frac{0.48\times 0.52}{1000}}\right]$

b. $\left[\frac{480}{1000} - 1.96\sqrt{\frac{0.48\times 0.52}{999}} \,;\, \frac{480}{1000} + 1.96\sqrt{\frac{0.48\times 0.52}{999}}\right]$

c. $\left[\frac{520}{1000} - 1.96\sqrt{\frac{0.48\times 0.52}{1000}} \,;\, \frac{520}{1000} + 1.96\sqrt{\frac{0.48\times 0.52}{1000}}\right]$

d. $\left[\frac{480}{1000} - 1.65\sqrt{\frac{0.48\times 0.52}{1000}} \,;\, \frac{480}{1000} + 1.65\sqrt{\frac{0.48\times 0.52}{1000}}\right]$

9- On souhaite montrer à l'aide d'un test d'hypothèses de niveau α que lors des élections qui opposent le candidat Ernest au candidat Bart, le candidat Bart va gagner. Pour ce test sur la proportion p de personnes qui votent pour Bart, la zone de rejet est :

a. $]-\infty\,;\, z_{1-\alpha}[$ où $z_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une loi normale centrée réduite.

b. $]-\infty\,;\, -z_{\alpha}]$ où z_{α} est le quantile d'ordre α d'une loi normale centrée réduite.

c. Aucune des autres réponses n'est correcte

d. $[z_{\alpha}\,;\, +\infty[$ où z_{α} est le quantile d'ordre α d'une loi normale centrée réduite.

10- Pour le test décrit à la question précédente, si on a observé 520 personnes qui déclarent voter pour le candidat Bart parmi 1000 personnes interrogées, la conclusion de ce test au niveau 5% est :

a. On rejette H_1.

b. On rejette H_0.

c. On ne rejette pas H_0.

d. Aucune des autres réponses n'est correcte.

Extrait des quantiles d'ordre 0.95 **d'une loi de Fisher à** p **et** q **degrés de liberté** : Valeurs de x telles que $\Pr(X \leq x) = 0.95$, avec $X \sim F_{p,q}$.

q/p	**5**	**6**	**7**	**8**
5	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183
6	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468
7	3.9715	3.866	3.787	3.7257
8	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381

Extrait des quantiles d'ordre β **d'une loi de Student à** n **degrés de liberté** : Valeurs de x telles que $\Pr(X \leq x) = \beta$, avec $X \sim T_n$.

n/β	**0.75**	**0.9**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**	**0.9995**
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.5869
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.201	2.7181	3.1058	4.437
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.681	3.0545	4.3178
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	4.2208
14	0.6924	1.345	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	4.1405
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	4.0728

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$\Phi(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$$

Pour $x < 0$, utiliser $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

x	1.2816	1.6449	1.96	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905	3.8906
$\Phi(x)$	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995

	a	b	c	d
question 1				
question 2				
question 3				
question 4				
question 5				
question 6				
question 7				
question 8				
question 9				
question 10				

Etiquette ici →