Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2014-2015

Session 1 - Semestre 2

Licence 1 mention Economie parcours Economie et Mathématiques et Informatique Appliquées

Epreuve : FONCTION D'UNE VARIABLE REELLE

Date de l'épreuve : 5 mai 2015

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : aucun

Nombre de pages : 2

Exercice n°1 : *(8 points)*

$$\text{Soit } f(t) = te^{-t^2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
2. Etudier la concavité – convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflexion.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire les conséquences pour la courbe représentative de la fonction f.
4. Dresser le tableau d'étude de la fonction f.

   Tracer la courbe représentative de la fonction f en considérant :

   $e = 2,7 \qquad e^{-0,5} = 0,6 \qquad e^{-1} = 0,4 \qquad e^{-2} = 0,15 \qquad \sqrt{0,5} = 0,7 \qquad \sqrt{1,5} = 1,2$

5. Si $x > 0$, soit $F(x) = \int_0^x te^{-t^2}dt$

   - Calculer $F(x)$ et indiquer $F(x)$ sur la représentation graphique.
   - Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

Exercice n°2 : *(2 points)*

$$\text{Calculer } \lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+n)^2}$$

Exercice n°3 : *(5 points)*

Soit $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4+t^2}}$ $\qquad t \in \mathbb{R}$

1. Ecrire le développement limité d'ordre 2 de $f(t)$ au voisinage du point 0.
2. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4+t^2}}$ $\qquad \forall x > 0$
   - Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$
   - Ecrire le développement limité d'ordre 3 de $F(x)$ au voisinage de 0.
   - En déduire l'équation de la tangente à la courbe C_F au point 0 et la position de celle-ci par rapport à la courbe C_F

Exercice n°4 : *(5 points)*

$$\text{Soit } I_n = \int_1^e (\ln t)^n \, dt$$

1. Calculer I_0
2. En effectuant une intégration par parties :
   - Calculer I_1
   - Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n
3. En déduire $\displaystyle\int_1^e (\ln t)^3 \, dt$