Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2014-2015

Session 1 - Semestre 2

Licence 1 mention Economie parcours Economie et Mathématiques et Informatique Appliquées

Epreuve : ALGEBRE LINEAIRE

Date de l'épreuve : 28 avril 2015

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Aucun

Liste des matériels autorisés : Aucun

Nombre de pages : 2

L1 Économie et Mathématiques UNIVERSITÉ TOULOUSE I CAPITOLE

Examen Terminal -Algèbre linéaire
Semestre 2 - session 1 - 2014-2015

Calculatrice et documents interdits.

Nota Bene: La clarté des explications sera appréciée. Tout défaut de rigueur, de présentation ou de rédaction sera durement sanctionné.

Exercice 1. [10 points]

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré 2 au plus. à coefficients réels. On définit

$$f : P \in E \longmapsto P(1) \in \mathbb{R}.$$

1. Rappeler *rapidement* la structure de E et la nature de f.
2. On note $F = \ker(f)$. Démontrer en utilisant des théorèmes du cours que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.
3. Démontrer que $(X-1, X^2-1)$ est une base de F.
4. Soit $G = Vect(X^2+1)$, quelle est la dimension de G?
5. Montrer que $\mathcal{B} = (X-1, X^2-1, X^2+1)$ est une base de E.
6. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (pour l'espace de départ) et $\{1\}$ (pour l'espace d'arrivée).
7. Déterminer les coordonnées des polynômes "canoniques" $e_0 = 1, e_1 = X, e_2 = X^2$ dans la base $\mathcal{B}$.
8. Démontrer que F et G sont supplémentaires. On note p la projection sur F parallèlement à G. Donner la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
9. Donner une définition de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G (illustrer avec un dessin "virtuel") et donner la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$.
10. Donner les images de e_0, e_1, e_2 par p et s.
11. En déduire la matrice de p et celle de s dans la base (e_0, e_1, e_2) (pour l'espace de départ et d'arrivée).

Exercice 2. [10 points]

L'objet de cet exercice est de caractériser les couples d'applications linéaires (f, g) d'un espace vectoriel E de dimension finie n telles que

$$f \circ g - g \circ f = f. \tag{1}$$

1. Étude préliminaire

(a) On appelle *trace d'une application linéaire* la trace de la matrice représentant l'application f dans la base canonique E. et on notera $Tr(f)$ cette trace. Plus précisément, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on note

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) \qquad \text{et} \qquad Tr(f) = Tr(A).$$

Démontrer que $f \longmapsto Tr(f)$ est une application linéaire.

(b) Démontrer que la définition de $Tr(f)$ est indépendante de la base permettant d'écrire la matrice de f, c'est à dire que si on utilise une autre base $\mathcal{B}' \neq \mathcal{B}$, la valeur de $Tr(f)$ reste inchangée. (On pourra admettre ce résultat dans la suite du problème).

(c) Soit f linéaire et $\alpha \neq 0$. Démontrer qu'il n'existe pas g bijective telle que

$$f + \alpha Id_E = g^{-1} \circ f \circ g.$$

Indication: on utilisera l'application trace précédente.

2. On suppose que f et g sont deux applications linéaires vérifiant (1).

   (a) Démontrer que f n'est pas bijective (on utilisera la question 1.c).

   (b) Démontrer que $Tr(f) = 0$.

   (c) Étudier le cas particulier où $n = 1$, c'est-à-dire lorsque $E = \mathbb{R}$.

   (d) **On suppose désormais que $n = 2$ pour le reste du problème.** En écrivant f dans la base canonique et en utilisant 2.b, démontrer que sa matrice est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

   En utilisant le 2.a, en déduire que A^2 est la matrice nulle et que $f^2 = 0$.

   (e) En supposant que f est une application linéaire non identiquement nulle de E, démontrer qu'il existe $a \in E$ tel que $(a, f(a))$ est une base de E. On utilisera en particulier la question précédente.

   (f) Écrire alors la matrice de f dans cette base $(a, f(a))$. Dans la suite du problème, on notera $\mathcal{E}$ cette base de E.

3. Déterminer les matrices B vérifiant

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B - B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Conclure l'étude pour $n = 2$.