UNIVERSITÉ TOULOUSE I CAPITOLE

Licence 1 mention Economie parcours économie et mathématiques et informatique appliquées
Epreuve : Algèbre linéaire – Code : L1-S2-16

<u>Calculatrice non autorisée.</u>

Exercice 1. [5 points]
Soit F l'ensemble des vecteurs $u = (x, y, z)$ tels que

$$x - y + 3z = 0 \qquad \text{et} \qquad 2x + y + z = 0$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Identifier la nature géométrique de F.
3. Trouver une base de F.

Exercice 2. [6 points] Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré exactement n.
On définit

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Démontrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. Décrire $\ker(f)$ et en donner une base.
4. Décrire $Im(f)$ et en donner une base.

Exercice 3. [9 points]
On considère $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de E. On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On considère f l'application linéaire de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.

1. Déterminer le noyau de f. Quelle est sa dimension? On notera u un vecteur non nul de $\ker f$.
2. Démontrer que l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que

$$f(x) = x$$

est un espace vectoriel de dimension 1. Trouver v un vecteur non nul de cet ensemble.

3. Faire de même pour l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que
$$f(x) = 2x.$$
Trouver w un vecteur non nul de cet ensemble.

4. Démontrer que (u, v, w) est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.

5. Déterminer P telle que
$$A = PDP^{-1}.$$

6. Soit n un entier positif quelconque. Calculer D^n. En déduire A^n