Semestre 1 de la LICENCE MATHEMATIQUES et ECONOMIE

Les fondamentaux en Mathématiques : Examen

Décembre 2014

Tout document et calculette interdits

Exercice 1.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle
   (a) Donner la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.
   (b) Donner la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$. Donner la définition de $(G,*)$ est un groupe abélien.

Exercice 2. Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 (Caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$)**.**
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. M est la borne supérieure de A si et seulement si

1. $\forall x \in A, \qquad x \leq M,$

2. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \qquad M - \varepsilon < x \leq M.$

Exercice 3.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f vérifie :

$$\forall x_0, x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|.$$

Montrer à l'aide de la définition de la continuité que f est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels :

$$E_1 = \{ \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - 100y = 10z \quad \}.$$

$$E_2 = \{ \quad X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{i=n} \ln(i+1)x_i = 0 \quad \}.$$

$$E_3 = \{ \quad f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0 \quad \}.$$

$$E_4 = \{ \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin x + \cos y = 0 \quad \}.$$

Exercice 5.
Soit A l'ensemble des réels suivant :

$$A = \{ \ x \in \mathbb{R}, \quad \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \quad x = a + b\sqrt{7} \, \}.$$

1. Montrer que A, muni de l'addition et de la multiplication usuelles de $\mathbb{R}$, est un anneau commutatif.
2. On définit l'application f de $(A, +, \times)$ dans $(A, +, \times)$ par :

   $$\forall x = a + b\sqrt{7} \in A, \quad f(x) = f(a + b\sqrt{7}) = a - b\sqrt{7}.$$

   Montrer que f est un morphisme d'anneau.
3. Calculer $f \circ f$.
4. L'application est-elle bijective ?