Licence 1 mention Économie Parcours Économie et Gestion

Licence 1 mention Économie Parcours Économie et Droit

EPREUVE : MATHÉMATIQUES 2 – Code : L1-S2-3

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : Calculatrice non graphique, non programmable

---

Partie 1

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto \left(\frac{2y-x}{3}, \frac{x-2y}{3}\right)$ et les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants : $X_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Enfin, on pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Justifier que f est une application linéaire.

2) Déterminer la matrice associée à l'application f (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$). On notera A cette matrice.

3) Montrer que $\ker(f) = Vect(X_b)$ et $Im(f) = Vect(X_a)$.

4) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix}$.

5) Déterminer deux valeurs distinctes λ_a et λ_b, ordonnées telles que $\lambda_a < \lambda_b$, qui vérifient la propriété : $A - \lambda_a I_2$ et $A - \lambda_b I_2$ sont *non inversibles*.

6) Existe-t-il une *autre* valeur λ telle que $A - \lambda I_2$ soit non inversible ?

7) Montrer qu'on a $AX_a = \lambda_a X_a$ et $AX_b = \lambda_b X_b$.

8) La matrice P est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse P^{-1}.

9) Justifier que la famille $\{X_a, X_b\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

10) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées α et β de X dans la base $\{X_a, X_b\}$.

11) Calculer le produit $P^{-1}AP$.

12) En déduire la valeur de A^{2015}.

Partie 2

1) Résoudre le système suivant à l'aide de la méthode du Pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

2) Donner une base de l'ensemble des solutions du système précédent.

3) Quelle est la dimension de cet espace ?

4) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (2x + 2y - 2z, x - y + 2z, 3x + y)$. Donner une base de $Im\, f$.

5) À quoi correspond l'ensemble des solutions du système de la question 1) pour l'application f ?

6) Montrer que la famille composée des vecteurs obtenus dans les questions 2) et 4), forme une base de $\mathbb{R}^3$.

7) Donner la matrice de f relativement à cette nouvelle base.