

Année universitaire 2014-2015

Session 1 - Semestre 2

**Licence 1 mention Economie et Gestion
Licence 1 mention Economie et Droit**

EPREUVE : MATHÉMATIQUES 2

Date de l'épreuve : 12 MAI 2015

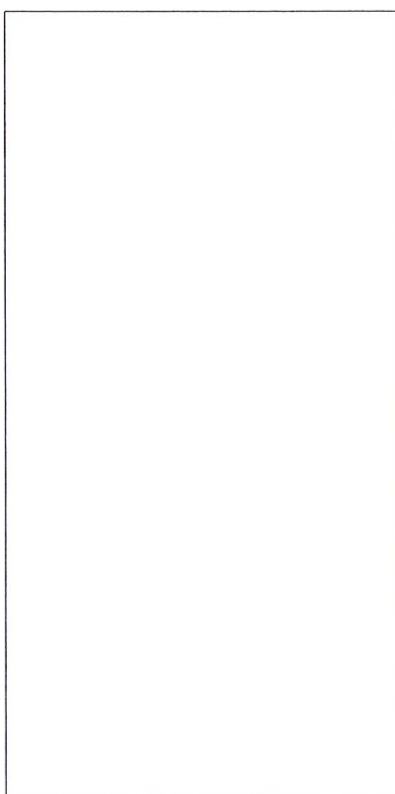
Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : Calculatrice non graphique, non programmable

Nombre de pages : 3 (entête compris)

Coller une étiquette ici



Précision. Les réponses au QCM (Partie 1) seront effectuées directement sur l'énoncé du sujet, qui sera placé dans la copie avant que celle-ci soit rendue. Les réponses au Problème (Partie 2) se feront sur la copie.

1 Questionnaire à choix multiple

Les questions suivantes n'ont qu'une seule bonne réponse.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire dont la matrice associée dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) La valeur de $\det(A)$ est :

- ☐ 2 ☐ 0 ☐ -1 ☐ 1

2) L'application f est

- ☐ injective ☐ surjective ☐ bijective ☐ ni injective, ni surjective

3) Le rang de f est :

- ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

4) Une base de $\text{Ker } f$ est :

- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

5) L'ensemble $\text{Im}(f)$ est égal à :

- ☐ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - \frac{y}{2} + z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\}$ ☐ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - \frac{y}{2} + z = 0\}$
☐ $\{(0, 0, 0)\}$ ☐ $\mathbb{R}^3$.

6) Parmi les vecteurs suivants, lequel n'appartient pas à $\text{Im}(f)$?

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7) Soient a, b et c des paramètres réels, tels que $2a - b + 2c = 0$. On considère le système suivant, d'inconnues x, y , et z :

$$(S) \begin{cases} x - y - z = a \\ 2x + 2z = b \\ y + 2z = c \end{cases}$$

Alors S admet :

- ☐ Aucune solution ☐ Deux solutions
☐ Une seule solution ☐ Une infinité de solutions

8) Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour que la famille $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$, on peut choisir $e_3 =$

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 9) On note $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$ les coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que cela équivaut à $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Pour que ces coordonnées vérifient l'équation $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la matrice de passage P doit être égale à :

$$\square \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 10) Les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{E}$ sont :

$$\square \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \quad \square \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \quad \square \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \quad \square \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$

- 11) La matrice de f relativement à la base $\mathcal{E}$ est :

$$\square PAP \quad \square P^{-1}AP \quad \square PAP^{-1} \quad \square P^{-1}A.$$

2 Problème

JUSTIFIER SOIGNEUSEMENT TOUTES VOS RÉPONSES

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$ et les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Enfin, on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Justifier que f est une application linéaire.
- 2) Déterminer la matrice associée à l'application f (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$). On notera A cette matrice.
- 3) Montrer que $\ker(f) = \text{Vect}(X_0)$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}(X_1)$.
- 4) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix}$.
- 5) Déterminer deux valeurs distinctes λ_0 et λ_1 , ordonnées telles que $\lambda_0 < \lambda_1$, qui vérifient la propriété : $A - \lambda_0 I_2$ et $A - \lambda_1 I_2$ sont *non inversibles*.
- 6) Existe-t-il une *autre* valeur λ telle que $A - \lambda I_2$ soit non inversible ?
- 7) Montrer qu'on a $AX_0 = \lambda_0 X_0$ et $AX_1 = \lambda_1 X_1$.
- 8) La matrice P est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse P^{-1} .
- 9) Justifier que la famille $\{X_0, X_1\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
- 10) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées α_0 et α_1 de X dans la base $\{X_0, X_1\}$.
- 11) Calculer le produit $P^{-1}AP$.
- 12) En déduire la valeur de A^{1789} .