

Semestre 6
LICENCE 3 mention ÉCONOMIE
LICENCE 3 mention ÉCONOMIE-INFORMATIQUE

**THEORIE STATISTIQUE DE
LA DECISION**
(durée 1h30)

E. LECONTE

Lundi 6 mai 2013 ~ 13h30 – 15h00

—=—=—=—=—

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Pour tous les tests statistiques demandés, on prendra un risque α de 5 %.
Les résultats des calculs seront donnés avec 2 décimales après la virgule.

Barème indicatif sur 20 : 6 – 4 – 10

Exercice A Soit X une variable de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ où p est un paramètre réel inconnu dans l'intervalle $]0, 1[$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance \hat{p}_{MV} de p sur la base d'un n -échantillon X_1, \dots, X_n de variables i.i.d. comme X .
Indications : on se rappellera qu'une loi de Bernoulli est un cas particulier de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
2. L'estimateur trouvé est-il sans biais ? Justifier votre réponse.
3. Déterminer l'estimateur \hat{p}_{MM} de p par la méthode des moments sur la base d'un n -échantillon X_1, \dots, X_n de variables i.i.d. comme X . Comparer avec l'estimateur \hat{p}_{MV} .
4. On jette 100 fois une pièce de monnaie et on observe 40 fois "pile" et 60 fois "face".
 - (a) Donner les estimations de p , la probabilité de tomber sur "pile", correspondant à la méthode du maximum de vraisemblance et à la méthode des moments.
 - (b) La pièce est-elle mal équilibrée ? (On répondra à cette question à l'aide d'un test statistique dont on précisera l'hypothèse nulle.)

Exercice B

1. On fait passer à 16 étudiants un test de QI (quotient intellectuel) et on obtient les résultats suivants pour la moyenne et l'écart-type empiriques : $\bar{x} = 115$ et $\hat{\sigma} = 15$.
Les tests de QI étant échelonnés pour que la distribution de la variable QI soit une variable normale d'espérance 100, peut-on considérer que les étudiants ont un QI supérieur à celui de la population générale ?
On fera un test **unilatéral** dont on donnera le nom et dont on précisera les hypothèses.
2. Parmi les 16 étudiants de la question 1, il y avait en fait 8 étudiantes. Sachant que la moyenne empirique des QI des 10 étudiantes vaut 120 (et donc que celle des 10 étudiants vaut 110), que pouvez-vous dire de la relation entre le QI et le sexe ? Vous justifierez votre réponse par un test statistique bilatéral en précisant les hypothèses testées. On admettra que la variance du QI ne dépend pas du sexe et vous prendrez comme écart-type commun l'écart-type empirique de la question précédente.

Exercice C

Le laboratoire pharmaceutique Parce-que-je-le-veux-bien effectue des recherches sur les facteurs qui jouent un rôle dans la croissance des cheveux. A cet effet, 40 femmes volontaires sont enrôlées dans une étude : on leur attribue par tirage au sort un des 4 produits à tester (notés A, B, C et D), en créant donc 4 groupes de 10 femmes. Deux mois après, on mesure l'augmentation de la longueur de leurs cheveux (variable Y à expliquer).

1. Donner le nom et écrire le modèle linéaire gaussien (que l'on notera M_{III}) permettant de tester l'effet du facteur Produit sur la croissance des cheveux et préciser les hypothèses sur les erreurs.
2. Recopier et compléter le tableau d'analyse de la variance suivant, correspondant à l'ajustement du modèle de la question 1.

Source de variation	Sommes de carrés	d.d.l.	Carrés moyens
Produit			
Résiduelle	57,85		
Totale	71,23		

3. Effectuer le test de comparaison des effets des produits, en précisant l'hypothèse nulle testée sur les paramètres.

Un collègue de l'expérimentateur lui apprend que l'âge est connu pour influencer sur la croissance des cheveux. Fort heureusement, l'expérimentateur a fait remplir un questionnaire aux femmes volontaires et dispose donc de cette information. On note x_{ij} l'âge de la volontaire j qui a testé le produit i .

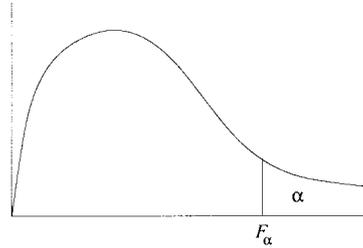
On considère donc les modèles suivants, pour $i = A, B, C, D$, $j = 1, \dots, 10$ où les ε_{ij} sont des v.a.r. i.i.d. de loi normale d'espérance nulle.

- $M_I : y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$,
- $M_{II} : y_{ij} = \mu + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij}$ dont la SCR vaut 57,88,
- $M_{IV} : y_{ij} = \mu_i + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij}$ dont la SCR vaut 48,60,
- $M_V : y_{ij} = \mu_i + \beta_i x_{ij} + \varepsilon_{ij}$ dont la SCR vaut 47,08,
- $M_{VI} : x_{ij} = \nu + \varepsilon_{ij}$ dont la SCR vaut 2971,10,
- $M_{VII} : x_{ij} = \nu_i + \varepsilon_{ij}$ où ν_i est l'effet du niveau i du facteur Produit, dont la SCR vaut 2782.

4. Vérifier à l'aide d'un test que l'âge a bien un effet sur la croissance des cheveux et, à l'aide de l'estimation du coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre l'âge et la longueur de pousse des cheveux qui vaut $\hat{\rho} = -0,43$, commenter le résultat obtenu.
5. Que pouvez-vous dire de la comparaison des modèles M_{II} et M_{III} ?
6. Y a-t-il un effet d'interaction entre l'âge et le produit ?
7. Que permet de vérifier le test de comparaison des modèles M_{VI} et M_{VII} (le faire !) ? En quoi est-ce important pour le problème que se pose l'expérimentateur ?
8. En tenant compte de l'effet de l'âge, tester l'effet du facteur Produit sur la croissance des cheveux. Comparer avec le résultat du test de la question 3.

On donne les quantiles suivants de la loi de χ^2 : $\chi_{1,0.05}^2 = 3,84$, $\chi_{2,0.05}^2 = 5,99$, les quantiles suivant de la loi normale centrée réduite : $z_{0.025} = 1.96$, $z_{0.05} = 1.645$ et les quantiles suivants des lois de Student : $t_{(14),0.05} = 1,761$, $t_{(15),0.05} = 1,753$, $t_{(16),0.05} = 1,746$, $t_{(14),0.025} = 2.145$, $t_{(15),0.025} = 2.131$ et $t_{(26),0.025} = 2.110$.

Loi de Fisher : $\alpha = 0.05$



	Degrés de liberté du numérateur : ν_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Degrés de liberté du dénominateur : ν_2	1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
	14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
	16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
	17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
	18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
	19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
	21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
	22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
	23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
	24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
	25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
	26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
	27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
	28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
	29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
31	4.16	3.30	2.91	2.68	2.52	2.41	2.32	2.25	2.20	
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	
33	4.14	3.28	2.89	2.66	2.50	2.39	2.30	2.23	2.18	
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	
37	4.11	3.25	2.86	2.63	2.47	2.36	2.27	2.20	2.14	
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	
39	4.09	3.24	2.85	2.61	2.46	2.34	2.26	2.19	2.13	
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	