UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

TSE
Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

Année Universitaire 2012-2013
SESSION 1

Semestre 6
LICENCE 3 mention ÉCONOMIE

OPTIMISATION
(durée 1h30)

P. PLAZANET

Vendredi 17 mai 2013 ~ 09h00 - 10h30

-=-=-=-=-

Seule la calculatrice Casio FX92 est autorisée.

1. Soit f la fonction définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^3$ par : $f(x,y,z) = \frac{y^5}{z^2} - \ln x$.
   (a) Calculer la hessienne de f. La fonction f est-elle convexe ?
   (b) Les fonctions e^f et e^{-f} sont-elles convexes ?
   (c) Les ensembles suivants sont-ils convexes ?
   $$A = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^{+*})^3 \; ; \; f(x,y,z) \leq 10 \text{ et } x+y+5z = 10\right\}.$$
   $$B = \left\{(x,y,z,t) \in (\mathbb{R}^{+*})^4 \; ; f(x,y,z) \leq t \text{ et } x^2+y^2+5z^2 < t\right\}.$$

2. Soit $f(x,y) = e^x + 5e^y + e^{-3x-5y}$. Calculer l'unique point critique de f. Montrer que f admet en ce point un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.
   On considère les deux problèmes de minimisation suivants :
   $\mathcal{P}_1$: Minimiser $f(x,y,z)$ sur $K_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z \leq 11 \, , x+2y+3z = 20\right\}$
   $\mathcal{P}_2$: Minimiser $f(x,y,z)$ sur $K_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z = 11 \, , x+2y+3z \leq 20\right\}$
   (a) Résoudre le problème $\mathcal{P}_1$.
   (b) Résoudre le problème $\mathcal{P}_2$.

4. Soit $g(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}}$ et $G(\alpha,\beta) = Sup\left\{g(x,y) - \frac{\alpha x}{2} - \frac{\beta y}{3} \; ; (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2\right\}$.
   (a) Montrer que g est concave sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.
   (b) Montrer que G est convexe sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ (sans calculer G).
   (c) Pour tout $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, calculer $G(\alpha,\beta)$.

Barème envisagé : *1)2+3+2* *2)3* *3)3+2* *4)2+1+2* .