UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

TSE
Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

Année Universitaire 2012-2013
Session 1

SEMESTRE 5
LICENCE 3 mention ÉCONOMIE

PROBABILITÉS et STATISTIQUE
(durée 2h00)

Mercredi 9 Janvier 2013 ~ 14h00 – 16h00

-≡-≡-≡-≡-

O. PERRIN

Seules les calculatrices de type Casio FX-92 sont autorisées.

Une seule grille est donnée.

Barème : une réponse juste vaut 1 point, une mauvaise réponse vaut –0,25 point et une non-réponse vaut 0 point.

Questions indépendantes

Question 1 A et B sont deux événements indépendants tels que $P(A) = 1/2$ et $P(B) = 1/4$. $P(A \cup B)$ vaut

(a) $2/4$
(b) $1/8$
(c) $5/8$
(d) $3/8$.

Question 2 A et B sont deux événements indépendants tels que $P(A) = 1/2$ et $P(B) = 1/4$. La probabilité conditionnelle $P(A|A \cup B)$ vaut

(a) 1
(b) $4/5$
(c) $2/5$
(d) $3/8$.

Question 3 Soit X une variable aléatoire (*v.a.*) suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(150; 0,001)$. On peut approximer la loi de X par

(a) une loi hypergéométrique $H(150; 15; 0,001)$
(b) une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1; 0,001)$
(c) une loi de Poisson $\mathcal{P}(0,15)$
(d) une loi de Poisson $\mathcal{P}(15)$.

Question 4 Soit X une *v.a.* qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$. Sachant que

$$P(X > -2) = 0,309 \text{ et } P(|X - \mu| < 1) = 0,382,$$

μ et σ valent (on donne $\Phi(0,5) = 0,691$)

(a) $\mu = -3$ et $\sigma = 2$
(b) $\mu = -4$ et $\sigma = 4$
(c) $\mu = -3$ et $\sigma = 0,5$
(d) $\mu = 3$ et $\sigma = 0,5$.

Question 5 Soit $\underline{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire dont les moments principaux sont $E(\underline{X}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $V(\underline{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Soit la *v.a.* $U = 3X^2 + 6XY - Y^2$. L'espérance de U vaut

(a) 8
(b) 19
(c) 11
(d) 15.

Problème I

On commence par faire deux calculs préliminaires. Soit $\lambda > 0$, on définit pour tout entier naturel n

$$I_n = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) x^n dx,$$

et, pour tout entier naturel k

$$I_{n,k} = \int_0^1 y^k(-\ln(y))^n dy.$$

Question 6 I_n vaut (faire le changement de variable $u = \lambda x$)

(a) $\frac{(n+1)!}{\lambda^n}$
(b) $\frac{n!}{\lambda^n}$
(c) $\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+1}}$
(d) $\frac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

Question 7 $I_{n,k}$ vaut (faire le changement de variable $u = -\ln(y)$)

(a) $\frac{n!}{(k+1)^{n+1}}$
(b) $\frac{n!}{k^n}$
(c) $\frac{(n+1)!}{(k+1)^{n+1}}$
(d) $\frac{(n+1)!}{k^{n+1}}$.

Soit maintenant (X, Y) le couple continu de densité conjointe

$$f(x, y) = Cx^{n-1}\mathbb{1}_D(x, y),$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \text{ et } 0 < y \leq \exp(-x)\}$, C est une constante et n un entier naturel strictement positif.

Question 8 La loi marginale de X est une

(a) γ_{n+2}
(b) γ_{n-1}
(c) γ_n
(d) γ_{n+1}.

Question 9 En déduire que

(a) $C = 1/n!$, $E(X) = n$ et $V(X) = n$
(b) $C = 1/\Gamma(n)$, $E(X) = n - 1$ et $V(X) = n - 1$
(c) $C = 1/(n-1)!$, $E(X) = n$ et $V(X) = n$
(d) $C = 1/n!$, $E(X) = n + 1$ et $V(X) = n + 1$.

Question 10 Le support D peut aussi s'écrire

(a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < y \text{ et } 0 \leq x \leq -\ln(y)\}$
(b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq -\ln(y)\}$
(c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y \leq 1 \text{ et } x \leq \ln(y)\}$
(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < y < +\infty \text{ et } 0 \leq x \leq \ln(y)\}$.

Question 11 La densité marginale de Y est

(a) $f_Y(y) = \frac{(-\ln(y))^n}{n!} \mathbb{1}_{(1;+\infty)}(y)$
(b) $f_Y(y) = \frac{(-\ln(y))^n}{n!} \mathbb{1}_{(0;1)}(y)$
(c) $f_Y(y) = \frac{(\ln(y))^n}{n!} \mathbb{1}_{(0;1)}(y)$
(d) $f_Y(y) = \frac{(\ln(y))^n}{n!} \mathbb{1}_{(1;+\infty)}(y)$.

Question 12 Pour k un entier naturel strictement positif, $E(Y^k)$ vaut

(a) $\frac{1}{k^n}$
(b) $\frac{n!}{(k+1)^{n+1}}$
(c) $\frac{1}{k^{n+1}}$
(d) $\frac{1}{(k+1)^{n+1}}$.

Question 13 Pour tout $x \geq 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est

(a) une loi gamma de paramètre $n - 1$
(b) une loi exponentielle de paramètre 1
(c) une loi uniforme sur $(0; \exp(x))$
(d) une loi uniforme sur $(0; \exp(-x))$.

Question 14 L'espérance conditionnelle $E(Y/X)$ et la variance conditionnelle $V(Y/X)$ sont

(a) $E(Y/X) = \exp(X)/2$ et $V(Y/X) = \exp(X)/12$
(b) $E(Y/X) = \exp(-x)/2$ et $V(Y/X) = \exp(-2X)/12$
(c) $E(Y/X) = \exp(X)/2$ et $V(Y/X) = \exp(2X)/12$
(d) $E(Y/X) = \exp(-X)/2$ et $V(Y/X) = \exp(-2X)/12$.

Question 15 $E(V(Y/X))$ vaut

(a) $\frac{1}{4}(\frac{1}{3^{n+1}})$
(b) $\frac{1}{2}(\frac{1}{3^{n+1}})$
(c) $\frac{1}{4}(\frac{1}{3^n})$
(d) $\frac{1}{2}(\frac{1}{3^n})$

Question 16 $V(E(Y/X))$ vaut

(a) $\frac{1}{2}(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{3^n})$
(b) $\frac{1}{4}(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{3^n})$
(c) $\frac{1}{2}(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n})$
(d) $\frac{1}{4}(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n})$.

Problème II

Soit une *v.a.* $X \sim \mathcal{N}(0;1)$. Soit la suite de *v.a.* $(X_n)_{n\geq 1}$.

Question 17 On suppose que $X_n = -X$ pour tout n. Quand $n \to +\infty$, X_n

(a) ne converge pas en probabilité vers X

(b) converge en probabilité vers X

(c) ne converge pas en loi vers X

(d) on ne peut rien dire.

Question 18 On suppose dans toute la suite que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de *v.a. i.i.d.* comme X. On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Quand $n \to +\infty$, S_n

(a) converge en probabilité vers 1

(b) ne converge pas en probabilité vers 1

(c) ne converge pas en loi vers 1

(d) converge en loi vers 0

Question 19 Quand $n \to +\infty$, S_n

(a) ne converge pas en moyenne quadratique vers 1

(b) converge en moyenne quadratique vers 1

(c) converge en moyenne quadratique vers 0

(d) converge en moyenne quadratique vers X

Question 20 On pose $T_n = X/\sqrt{S_n}$. Quand $n \to +\infty$, T_n

(a) converge en loi vers 0

(b) converge en loi vers 1

(c) converge en loi vers X

(d) ne converge pas en loi vers X.

Coller
verticalement
la
troisième
étiquette
ici.

Grille des réponses

Barème : une réponse juste vaut 1 point, une réponse fausse vaut -0.25 point et une non-réponse vaut 0 point.

	(a)	(b)	(c)	(d)
Question 1.				
Question 2.				
Question 3.				
Question 4.				
Question 5.				
Question 6.				
Question 7.				
Question 8.				
Question 9.				
Question 10.				
Question 11.				
Question 12.				
Question 13.				
Question 14.				
Question 15.				
Question 16.				
Question 17.				
Question 18.				
Question 19.				
Question 20.				