UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

TSE
Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

Année Universitaire 2012-2013
SESSION 1

Semestre 4
LICENCE 2 mention ÉCONOMIE et GESTION

MATHEMATIQUES APPROFONDIES
(durée 1h30)

B. ALZIARY

Lundi 13 mai 2013 ~ 12h30 - 14h00

-=-=-=-=-

Tous documents et calculettes interdits

Exercice 1. On s'intéresse à l'équation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+2} = a_1 x_{n+1} + a_0 x_n \qquad (E_{2lh})$$

où $(a_1, a_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est donnée. Nous savons que l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_{2lh}) est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

Montrer que si $a_1^2 + 4a_0 = 0$, cet ensemble est

$S_{a_1 a_0} = \{ \ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ y_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n \ \}$,

avec $r_0 = \frac{a_1}{2}$.

Exercice 2. On s'intéresse à l'équation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+2} = a_1 x_{n+1} + a_0 x_n + \alpha_n \qquad (E_{2l})$$

où $(a_1, a_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est donnée et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle donnée.

Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. *Les solutions $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du modèle (E_{2l}) sont du type*

$$x_n = y_n + c_n, \qquad \textit{pour tout } n \textit{ entier naturel,}$$

où $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution particulière et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution de l'équation homogène associée,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+2} = a_1 x_{n+1} + a_0 x_n \qquad (E_{2lh}).$$

Exercice 3.

1. Trouver les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 5u_{n+1} = u_n + 2.(5)^{-n}$$

2. Trouver les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 5u_{n+1} = u_n + n - 1 + 2.(5)^{-n}$$

Exercice 4. Trouver la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 3^n \end{cases}$$

Exercice 5. Trouver les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n + n$$

Exercice 6. On veut étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(u_n^2 - 3u_n + 4) \end{cases}$$

1. Etudier sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x(x^2-3x+4)$.
2. Que dire de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = 2$?
3. Que dire de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 \in]1, 2[$?
4. Que dire de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = 1$?
5. Que dire de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 \in]0, 1[$?
6. Que dire de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = 0$?
7. si $u_0 \in]2, +\infty[$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et en déduire que la seule limite possible est $+\infty$.
8. si $u_0 \in]-\infty, 0[$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et en déduire que la seule limite possible est $-\infty$.
9. Quels sont les états d'équilibre ? Sont-ils stables ou instables ?