UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année Universitaire 2012-2013
SESSION 2

SEMESTRE 4
LICENCE 2 mention ECONOMIE ET GESTION

Mathématiques 2 / code : L2S43

Lundi 1er juillet 2013

A. SOURISSE

➥ durée conseillée pour traiter ce sujet : 1 heure
➥ **ATTENTION** : le nom de la matière et son code doivent être **IMPERATIVEMENT** recopiés sur la copie d'examen

Indications :

↦ Aucun document n'est autorisé ;
↦ Seule la calculatrice UT1 est autorisée ;
↦ Le barème est donné à titre indicatif ;
↦ La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1. *(12 points)*
Soit f la fonction numérique définie pour $u = (x, y)$ par :

$$f(u) = xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy}.$$

1) (1 point) Déterminer $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition.
2) (1 point) Vérifier que f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}_f$.
3) (1 point) La fonction f est-elle convexe sur $\mathcal{D}_f$?
Pour la suite, on notera $\mathcal{U} =]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et g la restriction de f à $\mathcal{U}$.
4) (5 points) Etudier la nature locale du point stationnaire (ou point critique) de g.
5) (1 point) En notant φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\varphi(t) = t + \frac{1}{t}$, vérifier que pour $u = (x, y)$, $g(u) = \varphi(x)\varphi(y)$.
6) (3 points) En déduire que g admet un minimum global au point stationnaire.

Exercice 2. *(8 points + 2 points Bonus)*
Un maraîcher nantais souhaite améliorer le rendement de son exploitation et en priorité sa récolte de mâche. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la mâche cultivée, est donnée pour $u = (m, q)$ par :

$$f(u) = \frac{6}{5}m - \frac{103}{50}m^2 + 4mq - 2q^2$$

où m désigne la quantité de semences de mâche utilisées ($m \in]0;+\infty[$) et q la quantité d'engrais utilisé ($q \in]0;+\infty[$).

1) (5 points) Montrer que f possède un seul extremum local sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$, atteint en un unique point de $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et que cet extremum est un maximum local.
2) (3 points) Développement de l'expression : $2(m-q)^2 + 6\left(\frac{m}{10} - 1\right)^2$.
Que peut-on en déduire ?
3) (Bonus 2 points) Après consultation avec son comptable, il s'impose une contrainte budgétaire : $m + 2q = 23$.
Quelle sera alors la nouvelle valeur maximale du rendement ?