

SEMESTRE 3
LICENCE 2 mention ECONOMIE ET GESTION
LICENCE 2 mention ECONOMIE ET DROIT
LICENCE 2 mention ECONOMIE ET INFORMATIQUE

Mathématique 1 / code : L2S34

Mercredi 26 Juin 2013 ~ amphi CUJAS

-==--

A. DERLET
A. SOURISSE

↳ durée conseillée pour traiter ce sujet : 1 heure

↳ **ATTENTION** : le nom de la matière et son code doivent être **IMPERATIVEMENT** recopiés sur la copie d'examen

Exercice 1 (6,5 points). Déterminer la valeur de l'intégrale suivante :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{2xy}{y+3} + e^{-y^{3/2}} \right) dx dy,$$

avec $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1\}$.

On admettra que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{2xy}{y+3} + e^{-y^{3/2}}$ est continue sur \mathcal{D} .

Exercice 2 (13,5 points). Soit Q la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Dans la suite, on note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(Q)$.

(1) Soit $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ dans \mathbb{R}^3 . Donner l'expression de $\varphi_Q(u, u')$.

(2) Appliquer l'algorithme de réduction de Gauss à Q .

(3) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

(4) Justifier sans calcul que A est non inversible.

Quelle information peut-on en déduire sur le spectre de A ?

(5) Déterminer χ_A le polynôme caractéristique et $\sigma(A)$ le spectre de A .

(6) Déterminer la signature et la nature de Q .

(7) Trouver une base orthonormée \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(Q)$ telles que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.