Semestre 3
Licence 2 mention ÉCONOMIE et GESTION
Licence 2 mention ÉCONOMIE et DROIT
Licence 2 mention ÉCONOMIE et INFORMATIQUE

MATHÉMATIQUES 1

Mercredi 9 Janvier 2013 ~ 14h 30 – 16h 00

-=-=-=-=-

A. DERLET
A. SOURISSE

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Aucune calculatrice et aucun document ne sont autorisés.

Exercice 1 (6 points). *Déterminer la valeur des intégrales suivantes :*

$$I = \int_{-e}^{-1} (x+10)\ln(x^{10})\,dx \quad \text{et} \quad J = \iint_{\mathcal{D}} \left(6x + \frac{2xy+1}{x+1}\right) dx\,dy,$$

avec $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2\}$.
On admettra que la fonction $(x,y) \mapsto 6x + \dfrac{2xy+1}{x+1}$ *est continue sur* $\mathcal{D}$.

Exercice 2 (12 points). *Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ telle que :*

$$Mat_{\mathcal{B}_0}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans la suite, on note $A = Mat_{\mathcal{B}_0}(Q)$.

(1) Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Donner l'expression de $Q(x)$ en fonction des x_i.

(2) Soit $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Donner l'expression de $\varphi_Q(x,y)$ en fonction des x_i et y_i.

(3) Appliquer l'algorithme de réduction de Gauss à Q.

(4) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

(5) Vérifier que 2 est valeur propre de A.

(6) Déterminer χ_A le polynome caractéristique et $\sigma(A)$ le spectre de A.

(7) Déterminer la signature et la nature de Q.

(8) Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de $Mat_{\mathcal{B}_0}(Q)$ telles que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$.

(9) Justifier sans calcul que A est inversible.

(10) Exprimer A^{-1} comme une combinaison linéaire de A^2 et I_3.

(11) Calculer A^{-1} en utilisant une méthode au choix.

(12) On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Les conditions initiales sont $u_0 = 1, v_0 = -1, w_0 = 0$.
Exprimer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Exercice 3 (2 points). *Pour chaque affirmation ci-dessous, cocher l'unique bonne réponse. Une réponse correcte rapporte +0,5 point et une réponse incorrecte est sanctionnée par −0,25 point. Une absence de réponse ou plusieurs réponses cochées seront comptabilisés par 0 point.*
La note finale de cet exercice sera comprise entre 0 et 2 points.
***IMPORTANT** : Pour les réponses, il est demandé de recopier sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.*

Q1- *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_{1/e}^{+\infty} \frac{2}{x^2}\ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$

a) converge et vaut 0,

b) converge et vaut 2,

c) converge et vaut -2,

d) diverge,

e) aucune des réponses ci-dessus.

Q2- *On vous propose d'étudier, en utilisant la "règle du* x^α*", la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{4x^3-3}{x^4+4}\,dx$.
Si on note $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\frac{4x^3-3}{x^4+4}\right)$, *alors cette intégrale généralisée*

a) diverge car $\alpha = 2$ *et* $L = +\infty$,

b) converge car $\alpha = 2$ *et* $L = +\infty$,

c) diverge car $\alpha = 1$ *et* $L = 4$,

d) converge car $\alpha = 1$ *et* $L = 4$,

e) aucune des réponses ci-dessus.

Q3- *Même question que ci-dessus pour l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+e)}{x^{4/5}(x+1)}\,dx$.
Si note $L = \displaystyle\lim_{x\to0^+} x^\alpha \left(\frac{\ln(x+e)}{x^{4/5}(x+1)}\right)$, *alors cette intégrale généralisée*

a) converge car $\alpha = 2$ *et* $L = 0$,

b) diverge car $\alpha = 4/5$ *et* $L = 1$,

c) diverge car $\alpha = 1$ *et* $L = 0$,

d) converge car $\alpha = 5/6$ *et* $L = 0$,

e) aucune des réponses ci-dessus.

Q4- *On considère l'intégrale* $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{(e^x)^3+e^x+1}{e^x+2}\,\frac{dx}{x}$. *On a*

a) $K = \displaystyle\int_1^e \frac{t^3+t+1}{t+2}\,\frac{dt}{t}$,

b) $K = \displaystyle\int_1^e \frac{t^3+t+1}{t+2}\,\frac{dt}{\ln(t)}$,

c) $K = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(t))^3+\ln(t)+1}{\ln(t)+2}\,dt$,

d) $K = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(t))^3+\ln(t)+1}{\ln(t)+2}\,\frac{dt}{t}$,

e) aucune des égalités ci-dessus.