UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

TSE
Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

Collez ici votre
3ème étiquette
code-barres

Année Universitaire 2012-2013
SESSION 1

SEMESTRE 2
LICENCE mention ÉCONOMIE et GESTION
LICENCE mention ÉCONOMIE et GESTION parcours Européen
LICENCE mention ÉCONOMIE parcours ECONOMIE – INFORMATIQUE

COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUES
(durée 1h30)

A. SOURISSE
J. L VOLERY

Mardi 7 mai 2013 ~ 08h30 - 10h00

-≡-≡-≡-≡-

AUCUN document autorisé, AUCUN appareil électronique à usage scientifique autorisé : en particulier, AUCUNE calculatrice et AUCUN téléphone.

- AUCUN document autorisé, AUCUN appareil électronique à usage scientifique autorisé : en particulier, AUCUNE calculatrice et AUCUN téléphone.
- Des feuilles de brouillon de A4 de couleur vous seront distribuées.
- Coller votre étiquette d'anonymat sur ce sujet réponse.
- Durée de l'épreuve : **90 minutes**.
- <u>Notation pour chacune des questions :</u>
  - ↦ chaque bonne réponse rapporte +0.5 point ;
  - ↦ chaque mauvaise réponse est sanctionnée par -0.25 point ;
  - ↦ chaque absence de réponse ne rapporte pas de point.
- Vous cocherez directement votre réponse sur ce sujet-réponse. Vous rendrez ce document à la fin de l'épreuve.
- Chaque question comporte <u>une et une seule</u> bonne réponse **à l'exception** de la question n°40.
- Voici les thèmes abordés :
  - ↦ Q1 à Q13 : les matrices
  - ↦ Q14 à Q23 : les sous-espaces vectoriels
  - ↦ Q24 à Q34 : les applications linéaires
  - ↦ Q35 à Q39 : les systèmes d'équations linéaires
  - ↦ Q40 : un BEST OF sur les notions du semestre.

Exercice 1. **Etude des matrices**

Q1) Le déterminant d'une matrice carrée A triangulaire vaut :

- ☐ *le produit de tous les termes de A ;*
- ☐ *la somme de tous les termes de A ;*
- ☐ *la somme des termes diagonaux de A ;*
- ☐ *le produit des termes diagonaux de A.*

Q2) Que vaut Com(A) la comatrice de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ *?*

☐ $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -8 \end{pmatrix}$;

☐ $\begin{pmatrix} -8 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Q3) Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$ *est égal à :*

☐ $\begin{vmatrix} 9 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 1 \end{vmatrix}$; ☐ $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$;

☐ $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \\ -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$; ☐ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix}$.

Q4) Pour une matrice A de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$*, que peut-on dire de* $\left(A + {}^tA\right)$ *?*

- ☐ *c'est une matrice symétrique ;*
- ☐ *c'est la matrice nulle ;*
- ☐ *c'est une matrice antisymétrique ;*
- ☐ *aucune des propositions précédentes.*

Q5) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$*. Laquelle de ces opérations matricielles existe ?*

☐ $M{}^tM - {}^tMM$; ☐ $2M + {}^tM$;

☐ M^2 ; ☐ $({}^tM\,M)^3$.

Q6) L'inverse d'une matrice carrée A triangulaire supérieure inversible est :

- ☐ *une matrice triangulaire inférieure ;*
- ☐ *une matrice triangulaire supérieure ;*
- ☐ *une matrice antisymétrique ;*
- ☐ *on ne peut pas savoir.*

Q7) Que vaut $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & -6 \\ -3 & -7 & 9 \end{vmatrix}$ *?*

☐ 45; ☐ −12; ☐ 0; ☐ 1.

Q8) Rappeler la formule permettant d'exprimer A^{-1} *l'inverse d'une matrice carrée A en fonction de Com(A) la comatrice de A :*

☐ $\frac{1}{\det(A)}\ {}^t Com(A)$; ☐ $\frac{1}{\det({}^tA)} Com(A)$;
☐ $\frac{1}{\det(A)} Com(A)$; ☐ $\frac{1}{A}\ {}^t Com(A)$.

Q9) L'inverse d'une matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *est :*

☐ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;
☐ $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Q10) Que vaut le produit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

☐ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;
☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Q11) Si le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *est nul, cela signifie que :*

- ☐ *Les lignes de A sont linéairement indépendantes mais les colonnes de A sont liées ;*
- ☐ *Les colonnes de A sont libres mais les lignes de A sont liées ;*
- ☐ *C'est la matrice d'une application linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *;*
- ☐ *C'est la matrice d'un endomorphisme non inversible ;*
- ☐ *aucune des propositions précédentes.*

Q12) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. *Laquelle de ces propositions est vraie ?*

☐ $M\,{}^tM \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; ☐ $\det(M\,{}^tM) \geqslant 0$;
☐ $M\,{}^tM - {}^tMM = I_3$ ☐ ${}^tM = M$.

Q13) Soit $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ *où* α *est un réel non nul.*
Laquelle de ces propositions est vraie ?

☐ $M_\alpha^{-1} = M_{1/\alpha}$; ☐ $\det(M_\alpha) = 0$;
☐ $M_\alpha M_{-\alpha} = I_3$; ☐ $M_\alpha^{-1} = {}^tM_\alpha$.

Exercice 2. **Sous-espaces vectoriels réels**

Q14) Lequel de ces sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *?*

- ☐ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y=0 \text{ et } \ln(x) = 0\}$;
- ☐ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ e^{2x+3y} = 0\}$;
- ☐ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y=0 \text{ et } x^2+y^2 = 0\}$;
- ☐ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 = y^2\}$.

Q15) *Quelle est l'équation du sous-espace vectoriel engendré par* $(1;2;0)$ *et* $(4;5;-1)$ *?*

☐ $x-y-z=0$; ☐ $-2x+y-3z=0$;
☐ $z=0$; ☐ $2x-y=0$.

Q16) *Laquelle de ces familles de vecteurs de* $\mathbb{R}^2$ *est libre ?*

☐ $\big((1;2),(3;6)\big)$; ☐ $\big((1;0),(0;1),(1;1)\big)$;
☐ $\big((3;2),(-1;-2)\big)$; ☐ $\big((1;1),(0;0)\big)$.

Q17) *On définit le sous-espace vectoriel* F *de* $\mathbb{R}^3$ *en posant :*

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ 3x-4y+2z=0\}$$

Lequel de ces sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *?*

☐ $F\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x+z=1\}$;
☐ $F\cup\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x=0\}$;
☐ $\mathbb{R}^3\backslash F$;
☐ $F\cup\{(0;0;0)\}$;
☐ *aucune des propositions précédentes.*

Q18) *Parmi les familles suivantes, laquelle est génératrice du sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *donné par l'équation* $2x-6y+18z=0$ *?*

☐ $\big((3;1;0),(0;3;-1)\big)$;
☐ $\big((2;-6;0),(0;-6;18)\big)$;
☐ $\big((1;0;0),(0;1;0)\big)$;
☐ $\big((3;1;0),(-9;0;1)\big)$;
☐ *aucune des propositions précédentes.*

Q19) *Pour quelle valeur de a le vecteur* $(-6;3;a)$ *est-il dans le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs* $(1;-2;0)$ *et* $(-2;5;1)$ *?*

☐ 1 ; ☐ 0 ;
☐ -1 ; ☐ -9.

Q20) *Soit* $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ ;\ x+y+z+t=0$ *et* $x-y+2t=0$ *et* $3x-y+z+5t=0\}$. *Quelle est la dimension du supplémentaire de* F *dans* $\mathbb{R}^4$ *?*

☐ *4;* ☐ *3;* ☐ *2;* ☐ *1.*

Q21) *Soient* $F=Vect_{\mathbb{R}}\{(-1;1;1;2),(3;0;0;6)\}$ *et* $G=Vect_{\mathbb{R}}\{(0;4;4;-4),(2;-1;-1;2)\}$. *Laquelle de ces propositions est correcte ?*

☐ $\dim(F+G)=2$ *et* $\dim(F\cap G)=1$;
☐ $\dim(F+G)=3$ *et* $\dim(F\cap G)=1$;
☐ $F=G$;
☐ $F\oplus G=\mathbb{R}^4$.

Q22) *Laquelle de ces familles n'est pas génératrice de* $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x+2y-4z=0\}$ *?*

☐ $\big((2;1;1),(4;2;2),(2;3;2)\big)$;
☐ $\big((4;0;1),(12;0;3)\big)$;
☐ $\big((4;0;1),(2;3;2),(2;1;1)\big)$;
☐ $\big((2;1;1),(0;0;0),(4;0;1)\big)$.

Q23) *Laquelle de ces familles de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *est libre ?*

☐ $\big((1;2;3),(4;5;6),(1;1;1)\big)$;
☐ $\big((3;2;-2),(-5;-6;1),(1;-2;-3)\big)$;
☐ $\big((1;1;0),(0;1;1),(1;0;-1)\big)$;
☐ $\big((1;0;0),(0.1;0;1),(0.1;1;0.1)\big)$.

Exercice 3. **Etude des applications linéaires**

Q24) *Soit f une application linéaire de E dans F où E et F sont deux espaces vectoriels. Que vaut le noyau de f ?*

☐ $\{u\in E; f(u)=0_E\}$; ☐ $\{u\in E; f(u)=0_F\}$;
☐ $\{u\in F; f(u)=0_E\}$; ☐ $\{u\in F; f(u)=0_F\}$.

Q25) *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, pour $u=(x,y,z)$ par :*

$$f(u)=(x-y+z,x+2y-3z,4y+7z).$$

Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques ?

☐ $\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&-3\\0&4&7\end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&-3\\4&7&0\end{pmatrix}$;

☐ $\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&4\\1&-3&7\end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix}1&1&4\\-1&2&0\\1&-3&7\end{pmatrix}$.

Q26) *Parmi les applications f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ ci-dessous, laquelle est linéaire ?*
Pour $u=(x,y,z)$ dans $\mathbb{R}^3$, on a :

☐ $f(u)=(e^x-z,2x-y+4z)$;

☐ $f(u)=((x-y)^2z,-x+y-z)$;

☐ $f(u)=(x^2+y-z,3xy-z)$;

☐ $f(u)=(2x-2z,-x-y)$.

Q27) *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, pour $u=(x,y,z)$ par :*

$$f(u)=(x+y+z,y+z,z).$$

Quelle est la matrice de f^{-1} dans les bases canoniques ?

☐ $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$;

☐ $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

Q28) *De quelle application linéaire $f\in L(\mathbb{R}^3)$, $\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&1&-1\\2&5&3\end{pmatrix}$ est-elle une matrice représentative ?*
Pour $u=(x,y,z)$ dans $\mathbb{R}^3$, on a :

☐ $f(u)=(2x-y-z,2x+5y+3z,3x+y-z)$;

☐ $f(u)=(2x+3y+2z,-x+y+5z,-x-y+3z)$;

☐ $f(u)=(2x-y-z,3x+y-z,2x+5y+3z)$;

☐ $f(u)=(2x+3y+2z,-x-y+3z,-x+y+5z)$.

Q29) *Quelle est la dimension de l'image de l'application $f\in L(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$ dont la matrice représentative dans les bases canoniques est :*

$$\begin{pmatrix}3&4&4&5\\-3&-3&-2&-1\\3&2&0&-3\end{pmatrix}?$$

☐ 4; ☐ 3; ☐ 2; ☐ 1.

Q30) *Quel est le noyau de l'application linéaire $f\in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ définie pour $u=(x,y,z)$ par $f(u)=(2x-y-z,3y-3z)$?*

☐ $Vect_{\mathbb{R}}\{(2;1;1)\}$; ☐ $Vect_{\mathbb{R}}\{(1;1;1),(2;1;1)\}$;

☐ $\{(0;0;0)\}$; ☐ $Vect_{\mathbb{R}}\{(1;1;1)\}$.

Q31) *L'application $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ définie pour $u=(x,y,z)$ par $f(u)=(x-y,y-z)$ est :*

☐ *surjective mais non injective ;*

☐ *non surjective mais injective ;*

☐ *bijective ;*

☐ *non surjective et non injective.*

Q32) *L'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ définie pour $u=(x,y)$ par $f(u)=(2x-y,x+y,3x+2y)$ est :*

☐ *surjective mais non injective ;*

☐ *non surjective et non injective ;*

☐ *bijective ;*

☐ *non surjective mais injective.*

Q33) *Soit f une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, non nulle. Quelle proposition est vraie ?*

☐ *f est bijective ;*

☐ *f est surjective ;*

☐ *f est injective ;*

☐ *f est un endomorphisme.*

Q34) *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que : $dim(Ker(f))=1$.*
Quelle est la dimension de l'image de f ?

☐ 3; ☐ 2; ☐ 1; ☐ 0.

Exercice 4. $\boxed{\textbf{Et sur les systèmes linéaires}}$

Q35) L'ensemble des solutions du système linéaire

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \textit{est :}$$

- ☐ *L'intersection dans $\mathbb{R}^3$ de deux plans vectoriels ;*
- ☐ *Une droite affine de $\mathbb{R}^3$;*
- ☐ *L'intersection dans $\mathbb{R}^2$ d'une droite vectorielle et d'une droite affine ;*
- ☐ *L'intersection dans $\mathbb{R}^3$ d'une droite vectorielle et d'une droite affine ;*
- ☐ *aucune des propositions précédentes.*

Q36) Soient α un paramètre réel et (S_α) le système linéaire défini par :

$$(S_\alpha) \begin{cases} x - \alpha^3 y + 2z = -1 \\ x + \alpha y + 3z = 1 \\ x + 3\alpha y + 4z = -2 \end{cases}$$

où x, y et z sont les inconnues réelles.
Pour quelle(s) valeur(s) de α le système (S_α) est-il un système de Cramer ?

- ☐ $\alpha \in \{-1; 0; 1\}$;
- ☐ $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 0; 1\}$;
- ☐ $\alpha = 1$;
- ☐ *aucune des réponses précédentes.*

Q37) Soient α un paramètre réel et (S_α) le système linéaire défini par :

$$(S_\alpha) \begin{cases} 2x - \alpha^2 y - 3z = -1 \\ -5x + \alpha y + 6z = 1 \\ x + 3y + (1-\alpha)z = 5 \\ -x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

où x, y et z sont les inconnues réelles.
Laquelle de ces propositions est vraie ?

- ☐ *l'ensemble solution de (S_α) est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$;*
- ☐ $(1; 1; 1)$ *est une solution de $(S_{\alpha=0})$;*
- ☐ $(0; 0; 0)$ *n'est jamais une solution de (S_α) ;*
- ☐ *aucune des réponses précédentes.*

Q38) Dans quels cas le vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est-il une solution du système :

$$(S) : \begin{cases} ax + by + cz = 3 \\ bx + cy + az = -1 \\ cx + bz = 0 \end{cases}$$

- ☐ *Quand $a + b = 0$ et $c \in \mathbb{R}$;*
- ☐ *Il n'est jamais solution de (S) ;*
- ☐ *Uniquement lorsque $a = -1$, $b = 1$ et $c = 1$;*
- ☐ *Quand $a = -b$, $b = 1$ et $|c| = 1$;*
- ☐ *aucune des réponses précédentes.*

Q39) Si (S) est un système linéaire homogène à 4 inconnues et 3 équations, alors l'ensemble solution de (S) est :

- ☐ *constitué exactement de deux points de $\mathbb{R}^3$;*
- ☐ *constitué d'au moins un élément de $\mathbb{R}^4$;*
- ☐ *l'ensemble vide ;*
- ☐ *aucune des propositions précédentes.*

Exercice 5. $\boxed{\textbf{Pour aller plus loin}}$

Q40) Soit le polynôme :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

représenté par le vecteur (a_0, a_1, a_2, a_3) de $\mathbb{R}^4$.
Quelle est l'image de P par l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

<u>Attention</u> : deux réponses sont correctes !

- ☐ $P(X+1)$;
- ☐ P';
- ☐ $P(X-1)$;
- ☐ $P + P' + \frac{1}{2} P'' + \frac{1}{3} P'''$.