

Semestre 1
LICENCE 1 mention ÉCONOMIE et DROIT
LICENCE 1 mention ECONOMIE et GESTION
LICENCE 1 mention ECONOMIE et INFORMATIQUE

MATHÉMATIQUES (RAPPELS)
(durée 1h30)

Mercredi 9 Janvier 2013 ~ 8h 30 – 10h 00

—=—=—=—=—

M. LATOURELLE
A. SOURISSE
J.L. VOLERY

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note.
Aucune calculatrice et aucun document ne sont autorisés.

IMPORTANT : les 4 exercices sont indépendants. Vous pourrez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.

Exercice 1 (7 points).

- 1) Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a; b]$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.
Rappeler le théorème de Rolle pour la fonction f sur $[a; b]$. Illustrer ce théorème à l'aide d'un graphique.
- 2) Donner, sans justifier, la valeur de chacune des quatre limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$$

- 3) Donner la condition nécessaire d'optimalité (de minimum ou de maximum) du premier ordre (portant sur f'), en précisant bien les hypothèses de ce résultat.
- 4) Donner les conditions suffisantes d'optimalité du second ordre (portant sur f''), en précisant bien les hypothèses de ce résultat.
- 5) Donner la définition d'une fonction numérique convexe sur $I =]0; 1[$. Illustrer la définition à l'aide d'un graphique.

Exercice 2 (7 points).

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{|x| - 1}$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f , noté D_f .
- 2) Déterminer une expression de $f(x)$ sans valeur absolue, en fonction des valeurs de x dans D_f .
- 3) Déterminer le domaine de continuité de f .
- 4) Peut-on prolonger f par continuité en $x = 1$?
Si oui, définir f ce prolongement.
- 5) Déterminer si f est dérivable en 0.
- 6) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 7) (a) Déterminer a et b réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = ax + \frac{b}{x + 1}$$

(b) On admettra que l'intégrale $I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} dx$ est bien définie. Calculer I .

- 8) Calculer $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \tilde{f}(x) dx$.

Exercice 3 (2 points).

Calculer à l'aide d'une intégration par parties (ou primitivation par parties), en rédigeant avec soin, l'intégrale

$$I = \int_1^c x^2 \ln x dx.$$

1/2

Exercice 4 (4 points). Questions à choix multiples

- Pour chaque question, cocher une et une seule réponse.
- Si deux réponses d'une même question sont cochées, les réponses sont annulées et non comptabilisées.
- Pour chaque question, une et une seule réponse est correcte.
- **Barème pour cet exercice** : chaque bonne réponse rapporte + 0,5 point et mauvaise réponse est pénalisée par - 0,25 point. Toute absence de réponse est comptabilisée 0 point.
- La note finale de cet exercice sera comprise entre 0 et 4 points.

IMPORTANT : Pour les réponses, il est demandé de recopier sur votre copie le numéro de la question à côté de la lettre correspondante à la réponse choisie.

Q1) Un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ est :

- a) ouvert b) fermé c) un ensemble fini d) convexe.

Q2) Soit $a < b$ deux réels. Une fonction convexe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $]a, b[$ vérifie :

- a) f est continue sur $[a, b]$ c) $\forall x \in [a, b], f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$
b) $\forall x \in]a, b[, f''(x) \geq 0$ d) $\forall t \in [0, 1], f(tb + (1 - t)a) \leq tf(a) + (1 - t)f(b).$

Q3) Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Sur $I =]0; +\infty[$:

- a) f a un point de maximum global sur I c) f est convexe et n'a pas de point de minimum sur I
b) f est strictement convexe et a un unique point de minimum sur I d) f n'est pas convexe sur I .

Q4) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Soit la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(tb + (1 - t)a)$. Alors :

- a) $\exists t^* \in]0; 1[, \varphi'(t^*) = f(b) - f(a)$ c) φ est convexe sur $[a, b]$
b) $\forall t \in]0; 1[, \varphi''(t) = f''(tb + (1 - t)a)(b - a)$ d) $\varphi'(1/2) = 0$.

Q5) Parmi les fonctions suivantes, laquelle admet un point de minimum global sur son domaine de définition :

- a) $f(x) = 1 - (x - \frac{1}{2})^2$, avec $D_f =]-1; 1[$ c) $f(x) = x^3$, avec $D_f = \mathbb{R}$
b) $f(x) = x^2 + \ln(|x|)$, avec $D_f = \mathbb{R}^*$ d) $f(x) = |x|^3$, avec $D_f = \mathbb{R}$.

Q6) Soit $F :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $]0; 1[$, définie par $F(x^2) - F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. Alors pour tout $x \in]0; 1[$

- a) $F'(x^2) - F'(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ b) $F''(x) = 0$ c) $F'(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ d) $F'(x^2) 2x - F'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$.

Q7) La fonction $f :]-\infty; 1[\setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{|x| - 1}$

- a) admet une unique primitive sur $] - \infty; 1[\setminus \{-1\}$ c) n'admet pas de primitive sur $] - \infty; 1[\setminus \{-1\}$
b) admet une infinité de primitives sur $] - \infty; 1[\setminus \{-1\}$ d) admet $F : x \mapsto -\ln(-x+1)$ pour primitive sur $] - 1; 1[$.

Q8) Soient $a < a_1 < b_1 < b$ des réels. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Quelle est l'assertion qui entraîne toutes les autres ?

- a) f est continue sur $[a_1, b_1]$ c) f a la propriété des valeurs intermédiaires sur $[a_1, b_1]$
b) f est convexe sur $[a_1, b_1]$ d) f est strictement convexe sur $[a, b]$.