UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

TSE
Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

Année Universitaire 2011-2012
SESSION 1

Semestre 6
LICENCE 3 mention ÉCONOMIE

OPTIMISATION
(durée 1h30)

P. PLAZANET

Lundi 21 mai 2012 ~ 12h30 - 14h00

-=-=-=-=-

Seule la calculatrice Casio FX92 est autorisée.

1. Soit $f(x,y) = (x+4y)^2 - \sqrt{x} - 2\sqrt{y}$.
On considère les trois problèmes d'optimisation suivants :
$\mathcal{P}_1$: Minimiser $f(x,y)$ sur $K_1 = (\mathbb{R}^{+*})^2$.
$\mathcal{P}_2$: Minimiser $f(x,y)$ sur $K_2 =]3,4[^2$.
$\mathcal{P}_3$: Maximiser $f(x,y)$ sur $K_3 = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \; ; 1 \leq x \, , 1 \leq y \, , x+y \leq 5\right\}$.
   (a) Montrer que f est strictement convexe sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.
   (b) Résoudre $\mathcal{P}_1$.
   (c) Montrer que $\mathcal{P}_2$ n'a pas de solution.
   (d) Ecrire K_3 comme l'enveloppe convexe de 3 points (sans justifier), puis résoudre $\mathcal{P}_3$.

2. Soient $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + (z+x)^2$ et $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; z - x \leq -4 \, , y + z \leq -2 \right\}$.
   (a) Minimiser f sur K.
   (b) Le problème de la maximisation de f sur K a-t-il au moins une solution ?

3. Soit $f(x,y) = (x+y)^3 - 12xy$.
Préciser les extrémums locaux et globaux éventuels de f sur $\mathbb{R}^2$.

4. Soient $p \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}_p$ le problème suivant :
Minimiser $f_p(x,y) = (x+p)^2 + y^2$ sur $K_p = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + p^2 \leq y\right\}$.
   (a) Résoudre le problème $\mathcal{P}_p$.
   (On précisera soigneusement pour quelles valeurs de p les solutions proposées sont valides)
   (b) Calculer $V(p) = Inf\left\{f_p(x,y); (x,y) \in K_p\right\}$.
   (c) Pouvait-on prévoir la convexité de V sans résoudre le problème $\mathcal{P}_p$?

Barème envisagé : *1)2+2+1+2* *2)4+1* *3)3* *4)3+1+1 .*